PART3　二項分布の正規分布による近似

3　a を 3 以上の整数とする。2，4，6，……，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横 1 列に並べる試行を T とする。試行 T において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。

試行 T を 180 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数が 18 回以上 36 回以下である確率を，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従うとみなしてよい。

特に，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第 5 講　PART3　確認問題

1　5本のくじの中に2本の当たりくじが入っている。このくじから同時に2本のくじを引き，当たりかどうかを調べて元に戻す試行をTとする。試行Tにおいて，2本とも当たりである事象をAとする。

試行Tを2500回繰り返すとき，事象Aが起こる回数が274回以下である確率を求めよ。

ただし，次の<正規分布表>を用い，確率は，小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めよ。

0.［アイ］

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[MEMO]

PART3　二項分布の正規分布による近似

3　a を３以上の整数とする。2，4，6，……，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から３枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横１列に並べる試行をＴとする。試行Ｔにおいて，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。
試行Ｔを180回繰り返すとき，事象 A が起こる回数が18回以上36回以下である確率を，小数第３位を四捨五入して小数第２位まで求めよ。

a 枚のカードから３枚取り出して並べる場合の数は ${}_a\mathrm{P}_3$ 通り

a 枚のカードから３枚取り出して並べたとき，数字が左から小さい順に並んでいるのは，取り出した３枚のカードの順列のうち１通りのみ。よって，${}_a\mathrm{C}_3$ 通り。
したがって，事象 A の起こる確率 p は

$$p=\frac{{}_a\mathrm{C}_3}{{}_a\mathrm{P}_3}=\frac{{}_a\mathrm{C}_3}{{}_a\mathrm{C}_3\times 3!}=\frac{1}{6}$$

試行Ｔを180回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。よって，確率変数 X の

期待値　$m=180\cdot\frac{1}{6}=30$

標準偏差 $\sigma=\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{25}=5$

試行回数180回は十分に大きいから，X は近似的に正規分布 $N(30,\ 25)$ に従うとみなしてよい。
ここで $Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-30}{5}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。
よって

$$\begin{aligned}P(18\leqq X\leqq 36)&=P(-2.4\leqq Z\leqq 1.2)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2.4)+P(0\leqq Z\leqq 1.2)\\&=0.4918+0.3849\\&=0.8767\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　0.88

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：95

[解説]

5 本のくじから同時に 2 本引く方法は　${}_5C_2$ 通り

2 本の当たりを引く方法は　${}_2C_2$ 通り

よって，事象 A の起こる確率 p は

$$p=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

試行 T を 2500 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(2500,\ \frac{1}{10}\right)$ に従う。

よって，確率変数 X の

期待値　$m=2500\cdot\frac{1}{10}=250$

標準偏差　$\sigma=\sqrt{2500\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{25\cdot 9}=15$

試行回数 2500 回は十分に大きいから，X は近似的に正規分布 $N(250,\ 15^2)$ に従う。**[A]**

ここで，$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-250}{15}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned}P(X\leqq 274)&=P(Z\leqq 1.6)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.6)\\&=0.5+0.4452\\&=0.9452\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　**0.95**

[A]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従うとみなしてよい。特に，

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。